

Problem Set 22: 布尔代数引论

提交截止时间：5 月 20 日 10:00

Problem 1

设 B 是布尔代数, B 中的表达式 f 是 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

- (1) 化简 f ;
- (2) 求 f 的对偶式 f^* .

Problem 2

设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 证明 $\forall a, b \in B$ 有以下命题成立:

- (1) $a \vee (a' \wedge b) = a \vee b$;
- (2) $a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1 \Leftrightarrow a \preceq b$.

Problem 3

设 B 是布尔代数, $\forall a, b, c \in B$, 若 $a \preceq c$, 则 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$, 称这个等式为模律. 证明布尔代数适合模律.

Problem 4

设 B 是布尔代数, $a_1, a_2, \dots, a_n \in B$, 证明:

- (1) $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \dots \wedge a_n'$;
- (2) $(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee \dots \vee a_n'$.

Problem 5

设 $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ 和 $(S, +, *, \neg, \hat{0}, \hat{1})$ 是两个布尔代数, f 是 B 到 S 的映射.

证明: 如果对于任意的 $a, b \in B$, 有

$$(1) f(a \wedge b) = f(a) * f(b);$$

$$(2) f(\bar{a}) = \neg f(a).$$

则 f 是一个同态映射.

Problem 6

设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 在 B 上定义二元运算 \oplus , $\forall x, y \in B$ 有:

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y).$$

证明 $\langle B, \oplus \rangle$ 是交换群, 并且 $\forall x, y, z \in B$ 有:

$$(x \oplus y) \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z),$$

$$x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z).$$

注: 这个练习给出了布尔代数上的“环 (ring)”结构.

Problem 7

设 S 是命题逻辑中的全体公式, 在其上定义等价关系 \sim 如下: 称 $\phi \sim \psi$, 如果 $\phi \leftrightarrow \psi$ 是重言式. 记 S 在 \sim 下的全体等价类为 S/\sim , 试在 S/\sim 上定义 $\wedge, \vee, ', 0, 1$ 使其成为一个布尔代数.

Problem 8

设 $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ 是一个布尔代数, n 元集合 $A \subseteq B$. 记

$$A^* = \bigcap \{X | A \subseteq X \subseteq B, X \text{ 是 } B \text{ 的子布尔代数}\}.$$

证明 A^* 的基数不超过 2^{2^n} .

Problem 9

设 B 是布尔代数, $a, b \in B$, 证明:

$$a \preceq b \Leftrightarrow b' \preceq a'.$$

Problem 10

设 p_1, \dots, p_k 为不同素数, $N = p_1 \cdots p_k$, D 为 N 的所有正因子构成的集合. 证明: D 按照整除关系构成布尔代数.